WS2000/2001

Hartmut Gemmeke
Forschungszentrum Karlsruhe, HPE
Gemmeke@hpe.fzk.de
Tel.: 07247-82-5635

Einführung in die Elektronik für Physiker

Breitbandverstärker und aktive Filter

Breitbandverstärker II

- **Verstärker soll bei Gegenkopplung nicht schwingen $\Delta\varphi < 180°$**
  3 Stufen < 270° ! $\Rightarrow$ Kompensation, 1 dominierender Tiefpass

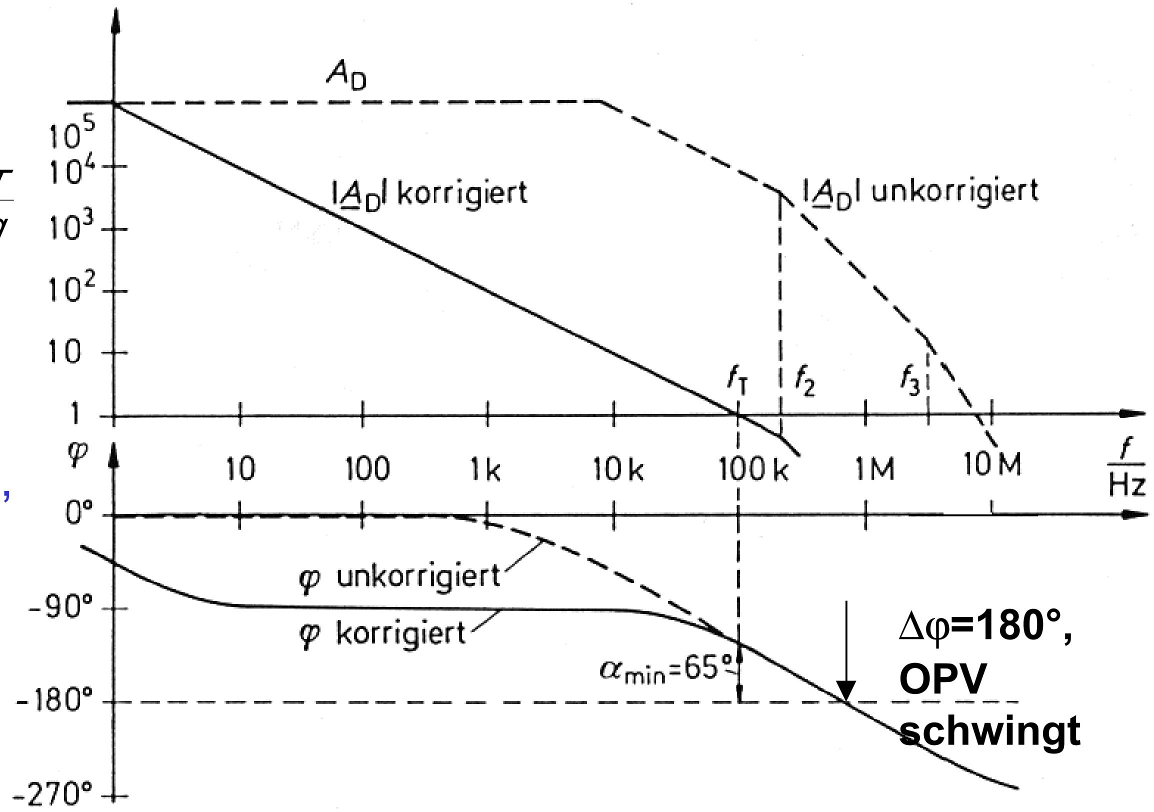
$$z.B.:\ \mu A741 \quad I = 20\mu A\ ,\ C = 30pF \qquad \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{I}{C} = \frac{20\mu A}{30pF} = 0{,}6\frac{V}{\mu s}$$

- **1.** Bandbreite hängt stark von Schleifenverstärkung ab.

$$f \cdot g = f_T \text{ oder Bandbreite } f = \frac{f_T}{g}$$

- **2.** große Signale werden durch "Slewrate" dU/dt in der Anstiegszeit begrenzt, z.B.: 6V Puls in μA 741

$$t_r = \frac{U}{\frac{dU}{dt}} = \frac{6V}{\frac{0{,}6V}{\mu s}} = 10\mu s$$



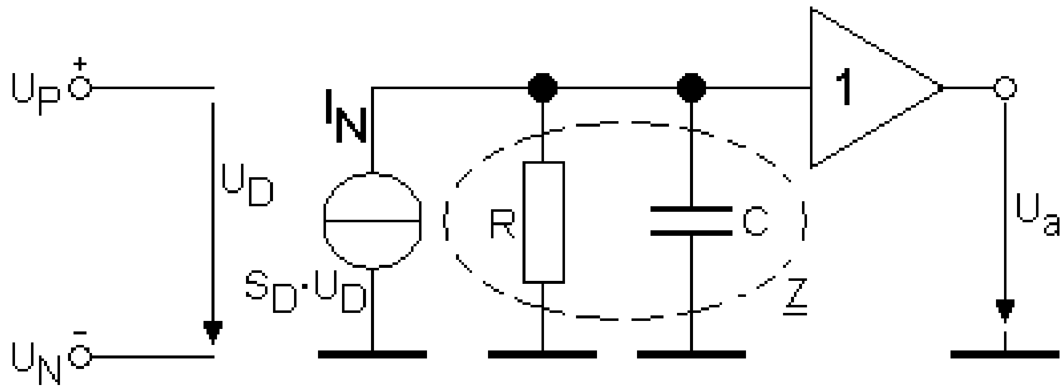
Breitbandverstärker III

„Normaler“ kompensierter Operationsverstärker ohne äußere Beschaltung:

$$\underline{U}_a = U_D \cdot S_D \cdot \underline{Z} = \underline{v}_{D0} \cdot U_D$$

$$\underline{Z} = R \Big\| \frac{1}{j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \approx \frac{1}{j2\pi f C}$$

Verstärker, Ersatzschaltbild



$$v_{D0} = S_D \cdot R$$

$$\underline{v}_D = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_D} = S_D \cdot \underline{Z} = \frac{v_{D0}}{1 + j \cdot \frac{f}{f_g}} \approx \frac{f_T}{j \cdot f} \quad mit \quad f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

$$f_T = v_{D0} \cdot f_g$$

vD „open loop gain“

Die Transitfrequenz f_t ist die Grenzfrequenz für einen gegengekoppelten Verstärker mit der Verstärkung 1.

Breitbandverstärker IV

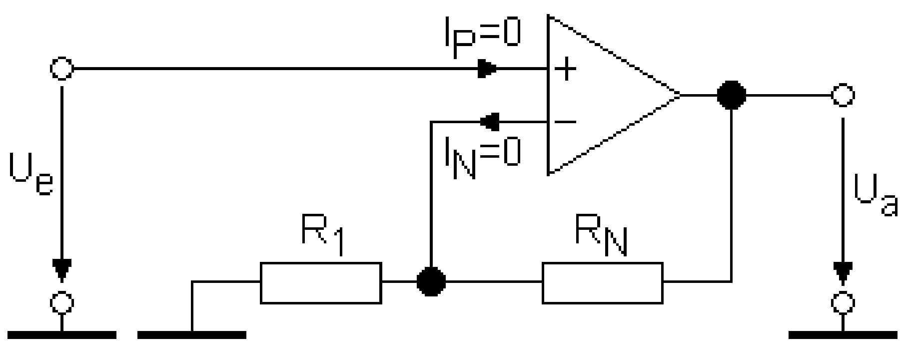
Unter Benutzung der goldenen Regeln:

$$\frac{U_a - U_N}{R_N} - \frac{U_N}{R_1} = 0$$

$$U_P = U_N = U_e$$

$$\underline{v}_0 = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \approx 1 + \frac{R_N}{R_1} \quad \textit{für} \; v_D >> 1 + \frac{R_N}{R_1}$$

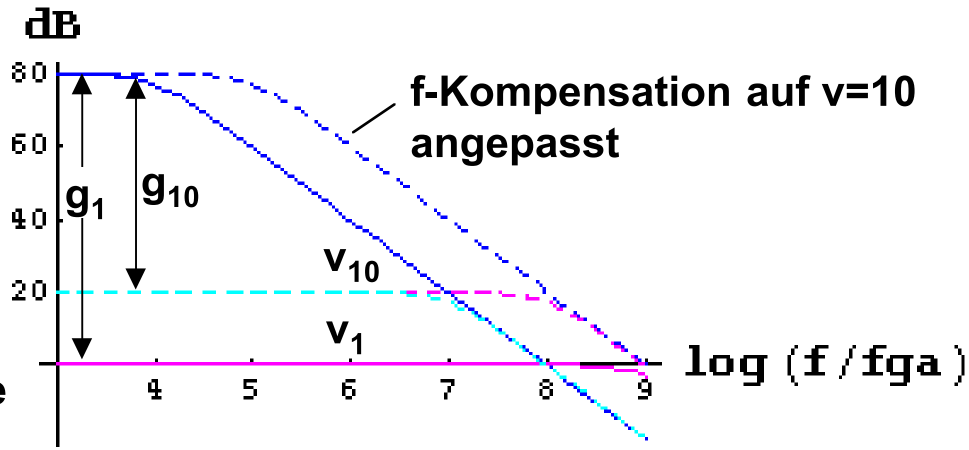
Verstärker, äußere Beschaltung



Frequenzgang mit fester Kompensation für alle Verstärkungen (aber abhängig von R_1 und R_N):

$$\underline{v} = \frac{v_0}{1 + j \cdot \frac{v_0}{f_T} \cdot f} \quad \textit{daher} \quad f_{gs} = \frac{f_T}{v_0}$$

$$g_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_N} \cdot v_{D0} = \frac{v_{D0}}{v_0}$$



Für jede gewünschte Verstärkung und damit externe Beschaltung gibt es eine eigene optimale Kompensation mit größerer Bandbreite

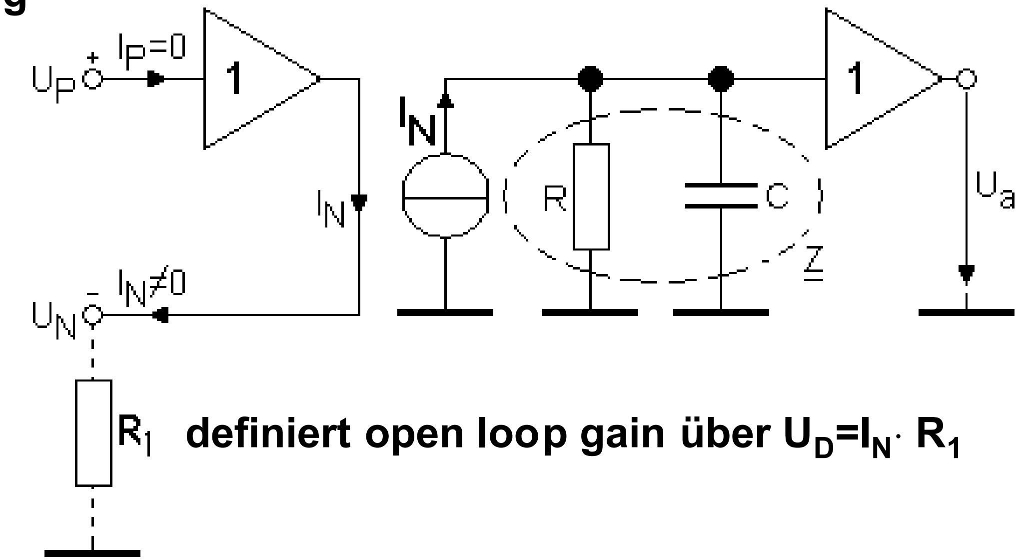
Transimpedanz-Verstärker I

Nichtinvertiender Eingang hochohmig
invertierender Eingang niederohmig
(Basis bzw. Stromeingang)

=> R_1 und R_N auch niederohmig und Slewrate:

$$\left(\frac{I}{C}\right)_{Transimp.} >> \left(\frac{I}{C}\right)_{normaler\ OPV}$$

Verstärker, Ersatzschaltbild



definiert open loop gain über $U_D=I_N \cdot R_1$

$$U_a = I_N \cdot Z$$

$$Z = R \left\| \frac{1}{j\omega C} \right. = \frac{R}{1 + jf/f_g} \approx \frac{1}{j2\pi fC}$$

$$mit \quad f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

$$\underline{v}_D = \frac{U_a}{U_D} = \frac{\underline{Z}}{R_1} = \frac{v_{D0}}{1 + j \cdot \frac{f}{f_g}}, \quad mit\ v_{D0} = \frac{R}{R_1}$$

Transimpedanz-Verstärker II

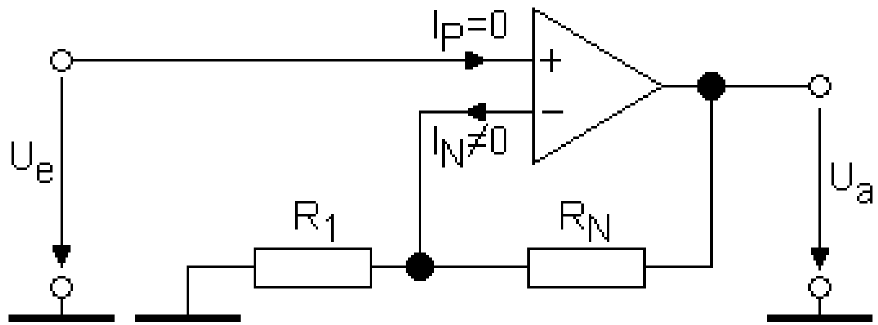
Knotenregel + goldene Regeln:

$$\frac{U_a - U_N}{R_N} - \frac{U_N}{R_1} + I_N = 0$$

$$U_N = U_P = U_e \text{ und } U_a = I_N \cdot Z$$

$$\Rightarrow U_a\left(\frac{1}{R_N} + \frac{1}{Z}\right) = U_e\left(\frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_1}\right)$$

Verstärker, äußere Beschaltung

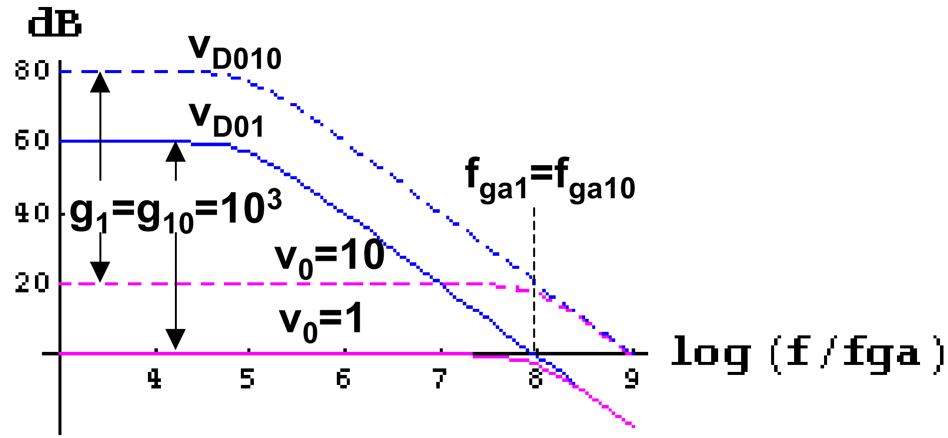


$$\underline{v} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{R_1 + R_N}{R_1 \cdot R_N} \cdot \frac{R_N \cdot \underline{Z}}{R_N + \underline{Z}} \approx 1 + \frac{R_N}{R_1} = v_0 \quad \text{für } |\underline{Z}| >> R_N$$

Frequenzgang und Schleifenverstärkung g unabhängig von R_1:

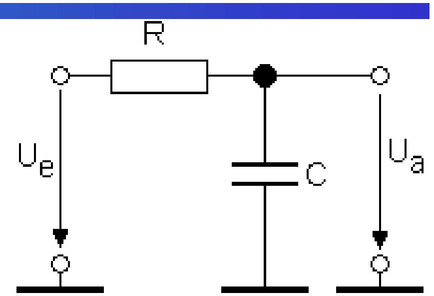
$$\underline{v} = \frac{v_0}{1 + j \cdot f / f_{gs}}, \qquad f_{gs} = \frac{1}{2\pi \cdot R_N \cdot C}$$

$$v_{D0} = \frac{R}{R_N \| R_1} = \frac{R}{R_N} \cdot v_0 = g_0 \cdot v_0 \quad \text{und} \quad g_0 = \frac{R}{R_N}$$



Anwendung: Verstärker mit sehr großer Bandbreite und variabler Verstärkung

Aktive Filter I



z.B.: Tiefpass 1.Ordnung

Übertragungsfunktion: $H(\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$

$|H(\omega)|$ hat einen negativen Pol

$j\omega \Rightarrow j\omega + \sigma = p$ Laplacetransformation L

$$H_{1T}(P) = \frac{1}{1 + p \cdot R \cdot C} = \frac{L\{U_a(t)\}}{L\{U_e(t)\}}$$

für beliebige zeitabhängige Signale

normierte Darstellung:

$$P = \frac{p}{\omega_g} \qquad \omega_g = 2\pi \cdot f_g = \frac{1}{R \cdot C}, \qquad \lim_{\sigma \to 0} P = \frac{j \cdot \omega}{\omega_g} = j \cdot \frac{f}{f_g} = j \cdot \Omega$$

$$\Rightarrow H_{1T}(P) = \frac{1}{1+P} \; und \; \left|H_{1T}(j \cdot \Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\Omega^2} \approx \frac{1}{\Omega^2} \; für \; \Omega >> 1 \quad 20 dB / Dekade$$

n-te Ordnung mit reellen Koeffizienten α_i, d.h. n reelle negative Pole **auch passiv darstellbar:**

$$H_{nT}(P) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \alpha_i \cdot P} = \frac{H_0}{\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot P^i}, \qquad \alpha_i > 0$$

$$\left|H_{nT}\right| \approx \frac{1}{\Omega^n}, \quad \Omega >> 1 \quad n \cdot 20 dB / Dekade$$

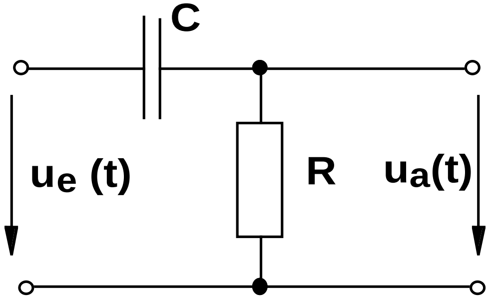
Aktive Filter II

i.a. Fall **Zerlegung in quadratische Ausdrücke** mit komplexen Polen; a_i, b_i reell, nicht mehr passiv darstellbar:

$$H_{nT}(P) = \frac{H_0}{\left(1 + a_1 P + b_1 P^2\right)\cdot\left(1 + a_2 P + b_2 P^2\right)\cdot \ldots}$$

n ungerade: $b_n = 0$

a_i, b_i bestimmen Filtercharakteristik



Hochpass

Hochpass:

Bild des Tiefpasses um $\Omega = 1$ spiegeln mit gleichem a_i,b_i wie zuvor!

$$P \Rightarrow \frac{1}{P}, H_0 \Rightarrow H_\infty \; und \quad H_{nH}(P) = \frac{H_\infty}{\prod_i \left(1 + \frac{a_i}{p} + \frac{b_i}{p^2}\right)}$$

Verschiedene Filtertypen

1 **Tiefpass mit kritischer Dämpfung:** $\alpha_i = \alpha = \sqrt{\sqrt[n]{2} - 1}$
kein Überschwingen
Reihenschaltung von identischen, entkoppelten Tiefpässen 1. Ordnung.

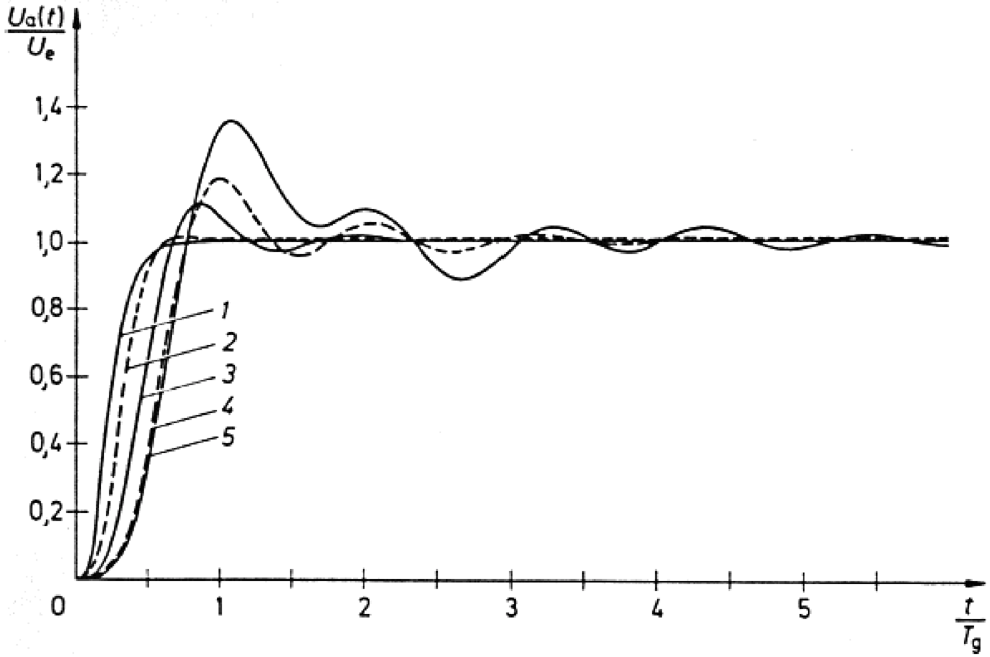
2 **Bessel-Filter:**
Optimale Übertragung von
Rechteckimpulsen für $\Omega < 1$ Gruppenlaufzeit
unabhängig von ω, nur geringes Überschwingen.

$$t_{gr} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}$$

3 **Butterworth-Filter:**
Amplituden-Frequenzgang
für $\Omega < 1$ optimiert, konstant.

4 **Tschebyscheff-Filter** mit
Restwelligkeit ε = 0,5dB

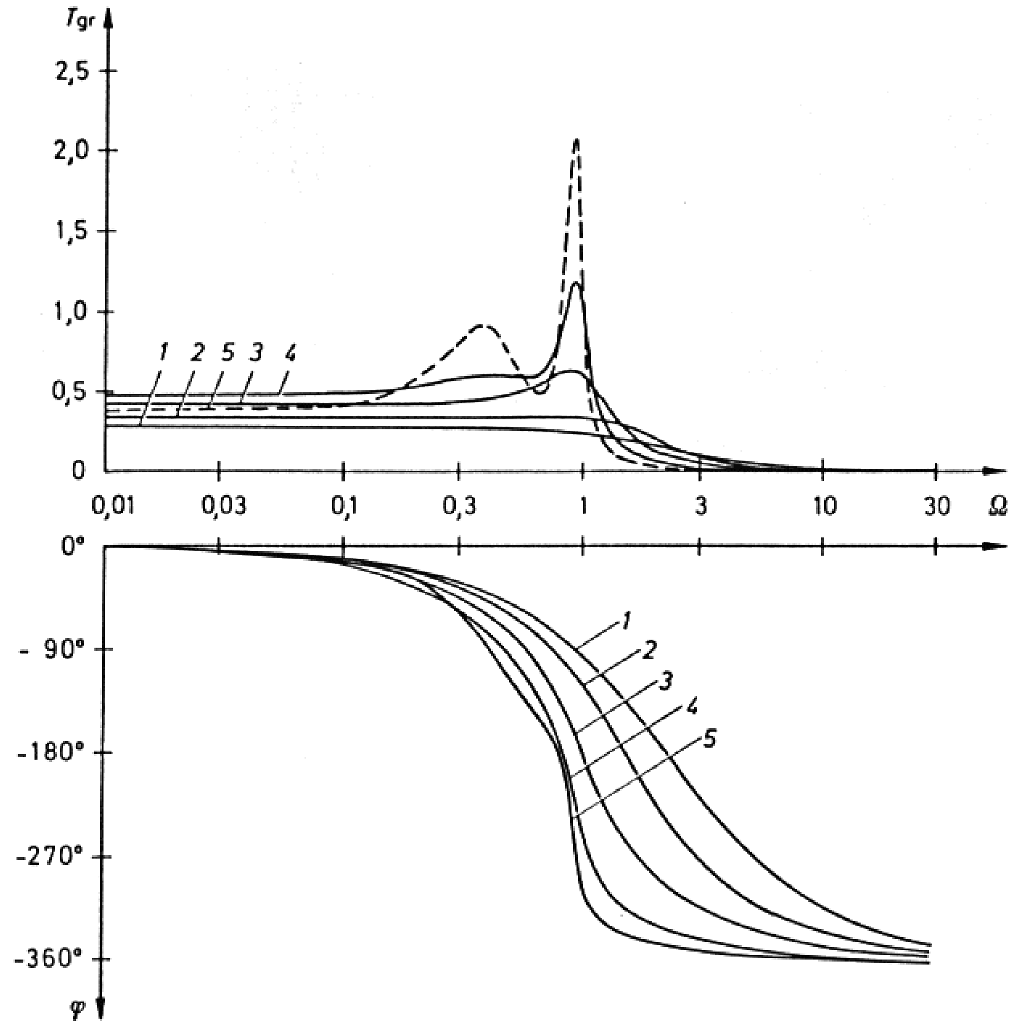
5 **Tschebyscheff-Filter** mit
Restwelligkeit ε = 3dB



Antwort der verschiedenen Filter 4. Ordnungauf eine Stufenfunktion:

Frequenzgänge der Gruppenlaufzeit und φ

- **Normierte Gruppenlaufzeit $T_{gr}(\Omega)$ für**
  - **1.kritische Dämpfung**
  - **2.Bessel Filter**
  - **3.Butterworth Filter**
  - **4.Tschebyscheff Filter mit 0,5dB Welligkeit**
  - **5.Tschebyscheff Filter mit 3dB Welligkeit**



Tiefpass-Filter 2. Ordnung: Kritische Dämpfung

Aneinanderreihung von einfache Filtern erster Ordnung

$$H^2 = \left|\frac{1}{1+i\cdot\alpha\cdot\Omega}\,\frac{1}{1+i\cdot\alpha\cdot\Omega}\right|^2 = \left|\frac{1}{1-\alpha^2\cdot\Omega^2+2i\cdot\alpha\cdot\Omega}\right|^2 \Rightarrow a_1 = 2\alpha,\ b_1 = \alpha^2$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g}\,,\quad \alpha = \sqrt{\sqrt[n]{2}-1},\quad n = 2 \Rightarrow \alpha^2 = \sqrt{2}-1$$

Ein n-facher RC-Filter hat eine um den Faktor α niedrigere Grenzfrequenz als der Einzelfilter:

$$H_{1T}^2 = \left|\frac{1}{1+i\cdot\frac{\omega}{\omega_g}}\right|^2 = \frac{1}{2},\quad 3dB-Punkt,\quad für\quad \omega = \omega_g = 1/RC$$

$$H_{2T}^2 = \left(\left|\frac{1}{1+i\cdot\alpha}\right|\right)^4 = \left(\frac{1}{1+\alpha^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}-1}\right)^2 = \frac{1}{2},\quad \omega_{g2T} = \alpha\cdot\omega_{g1T}\ (\alpha = 0{,}43)$$

Oder ich muss eine um den Faktor $1/\alpha$ größere Grenzfrequenz des Einzelfilters wählen um auf die gleiche Grenzfrequenz zu kommen!

Tiefpass-Filter 2. Ordnung: Bessel-Filter

Für optimale Übertragung von Rechteckimpulsen $b_1 = a_1/3$:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g} < 1, \quad t_{gr} = -\frac{d\varphi}{d\omega} \quad \textit{unabhängig von} \quad \omega$$

$$\textit{normierte Darstellung mit:}\ T_{gr} = \frac{t_{gr}}{T_g} = t_{gr} \cdot f_g = \frac{1}{2\pi} \cdot t_{gr} \cdot \omega \Rightarrow T_{gr} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{d\Omega}$$

$$z.B. \quad n = 2: \quad H = \frac{H_0}{1 + a_1 P + b_1 P^2} = \frac{H_0}{1 + j \bullet a_1 \Omega - b_1 \Omega^2} \Rightarrow \varphi = -\arctan \frac{a_1 \bullet \Omega}{1 - b_1 \bullet \Omega^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega} = -a_1 \cdot \frac{1 - b_1 \cdot \Omega^2 - \Omega \cdot (-2 b_1 \cdot \Omega)}{\left(1 - b_1 \cdot \Omega^2\right)^2 \cdot \left(1 + \left(\dfrac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2}\right)^2\right)} = -\frac{a_1 \cdot \left(1 + b_1 \cdot \Omega^2\right)}{\left(1 + \left(a_1^2 - 2 b_1\right)\Omega^2 + b_1^2 \Omega^4\right)}$$

$$mit \quad b_1 = a_1^2 - 2 b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{a_1}{3} \qquad \text{konstant bis auf Term} \propto \Omega^4$$

Tiefpass-Filter 2. Ordnung: Butterworth-Filter

solange wie möglich soll $|H(\Omega)|^2 = |H(0)|^2$

$$\left|H(\Omega)\right|^2 = \left|\frac{1}{1 + j\cdot a_1\cdot\Omega - b_1\cdot\Omega^2}\right|^2 = \frac{1}{\left(1 - b_1\cdot\Omega^2\right)^2 + \left(a_1\cdot\Omega\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(a_1^2 - 2b_1\right)\cdot\Omega^2 + b_1^2\cdot\Omega^4}, \quad \Omega < 1 \Rightarrow \Omega^4 \ll \Omega^2$$

$$\Rightarrow \quad a_1^2 = 2b_1 \quad , \left|H(\Omega=1)\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot\left|H(\Omega=0)\right|^2 \quad \textit{entspricht } 3dB - \textit{Abschwächung}$$

$$\Rightarrow \quad b_1 = 1 \qquad a_1 = \sqrt{2}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 + j\cdot\sqrt{2}\cdot\Omega - \Omega^2} \qquad \textit{bzw.} \quad \left|H\right|^2 = \frac{1}{1+\Omega^4}$$

Tiefpass-Filter 2. Ordnung: Tschebyscheff-Filter

Übertragungsfunktion mit konstanter Welligkeit < ε, aber sehr schnellem Abfall

$$\left|H_{nT}\right|^2 = \frac{k \cdot H_0^2}{1+\varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)}$$

$$T_1(\Omega) = \Omega$$

$$T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$$

$$T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega$$

$$\vdots$$

Tschebyscheff Polynome

k zur Normierung von H(Ω=0)

k = 1	**wenn**	**n ungerade**
k = 1 + ε^2	**wenn**	**n gerade**

$$\frac{H_{max}}{H_{min}} = \sqrt{1+\varepsilon^2}$$

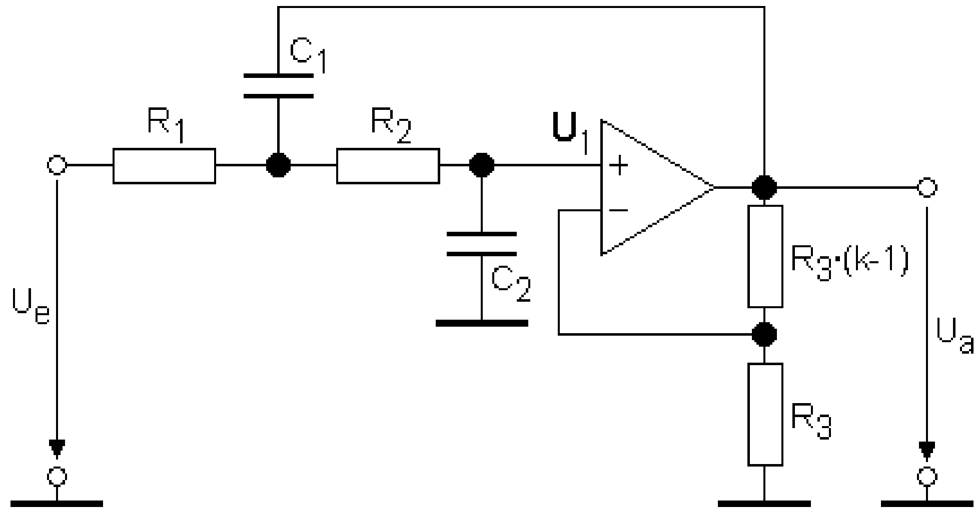
Aktive Schaltung für Filter 2. Ordnung I

- **Beispiel Tiefpass 2.Ordnung**
-

Filter-koeffizient	Kritische Dämpfung	Bessel-Filter	Butterworth-Filter	Tschebyscheff -Filter, 1dB
a_1	1,2872	1,3617	1,4142	1,3022
b_1	0,4142	0,6180	1,0000	1,5515

Dimensionierung aus Vergleich mit Übertragungsfunktion

$$V_u = \frac{U_a}{U_1} = 1 + \frac{R_3 \cdot (k-1)}{R_3} = k$$



$$H(P) = \frac{k}{1 + \omega_g \left[C_1 (R_1 + R_2) + (1-k) R_1 \cdot C_2 \right] \cdot P + \omega_g^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot P^2}$$

Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$ **Bestimmungsgleichungen für R_i, C_i**

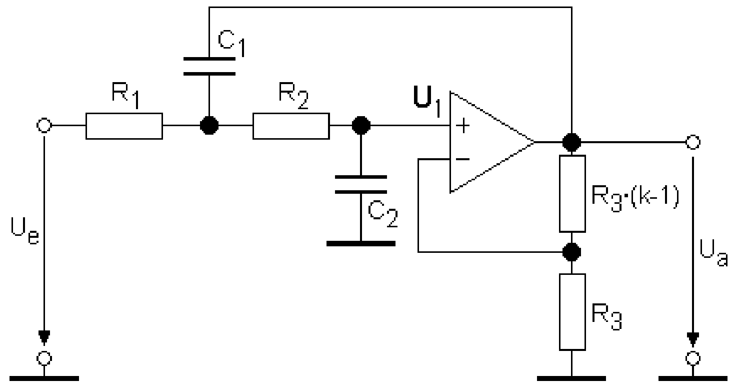
Aktive Schaltung für Filter 2. Ordnung II

- Spezialfälle: k=1 $\Rightarrow$ hohe Bandbreite des Verstärkers (Spannungsfolger), gut für Hochpässe.
- oder $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ (einfacher Wechsel der Filterart)

$$H(P) = \frac{k}{1+\omega_g(3-k)\cdot R\cdot C\cdot P+(\omega_g\cdot R\cdot C)^2\cdot P^2}$$

$$a_1 = \omega_g(3-k)\cdot R\cdot C, \quad \sqrt{b_1} = \omega_g\cdot R\cdot C$$

$$k = H_0 = 3-\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \Rightarrow \textit{Filtertyp}, \quad R\cdot C \Rightarrow \omega_g = \frac{\sqrt{b_1}}{R\cdot C}$$



	Kritische Dämpfung	Bessel-Filter	Butterworth-Filter	Tschebyscheff-Filter, 1dB Welligkeit
k	1,0	1,268	1,586	1,955

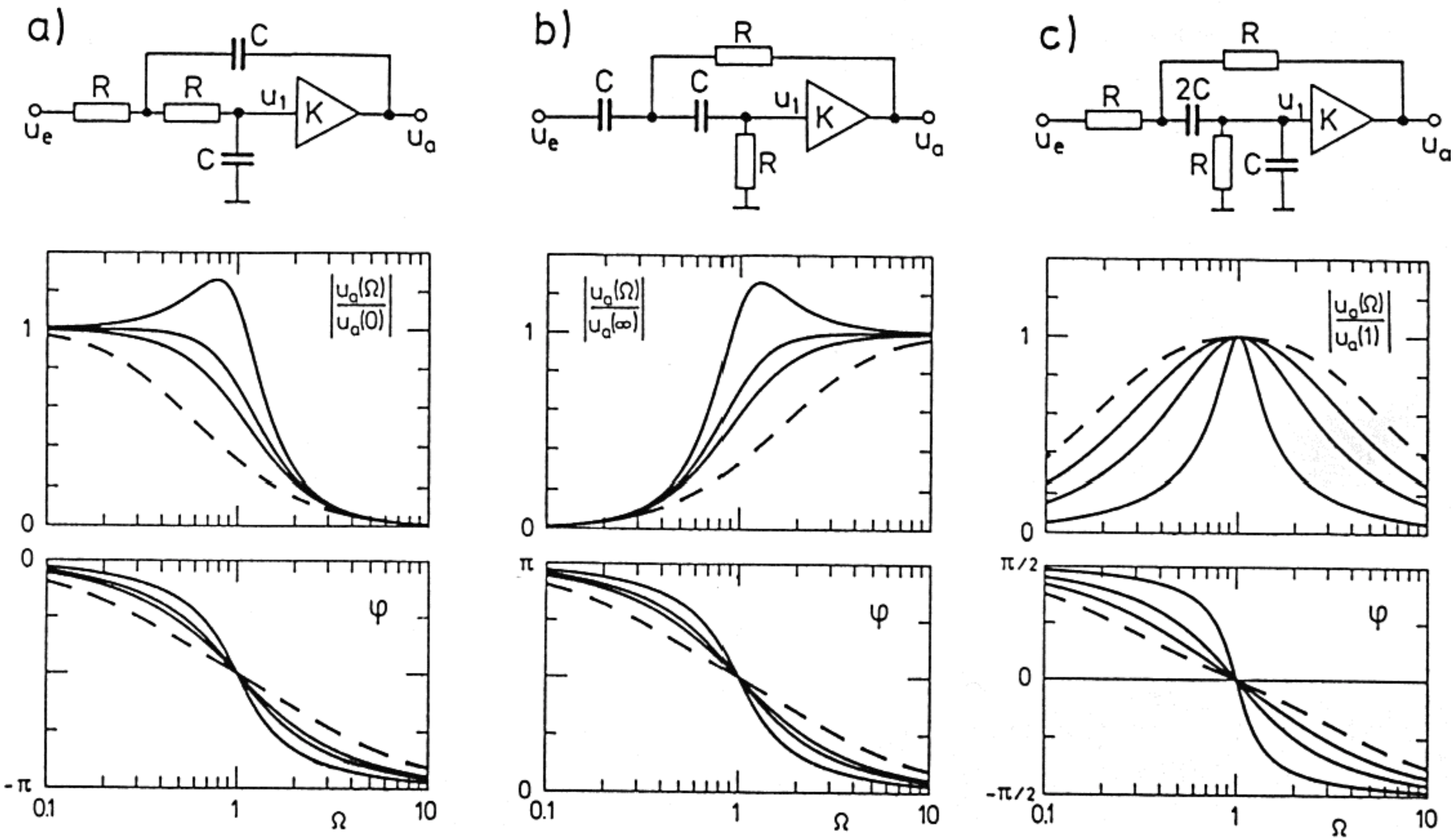
Vergleich der Filtereigenschaften

1. k=2.144 Tschebyscheff-Filter (2dB)

2. k = 1,586 Butterworth-Filter

3. k=1.286 Bessel-Filter

4. k=1 kritische Dämpfung - - -



$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{K}{1-\Omega^2+j\Omega(3-K)}$$

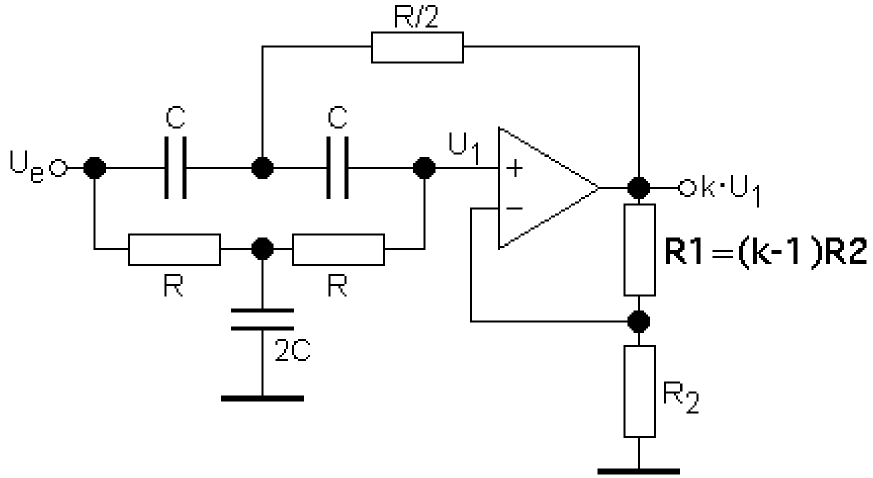
$$= \frac{-\Omega^2 \cdot K}{1-\Omega^2+j\Omega(3-K)}$$

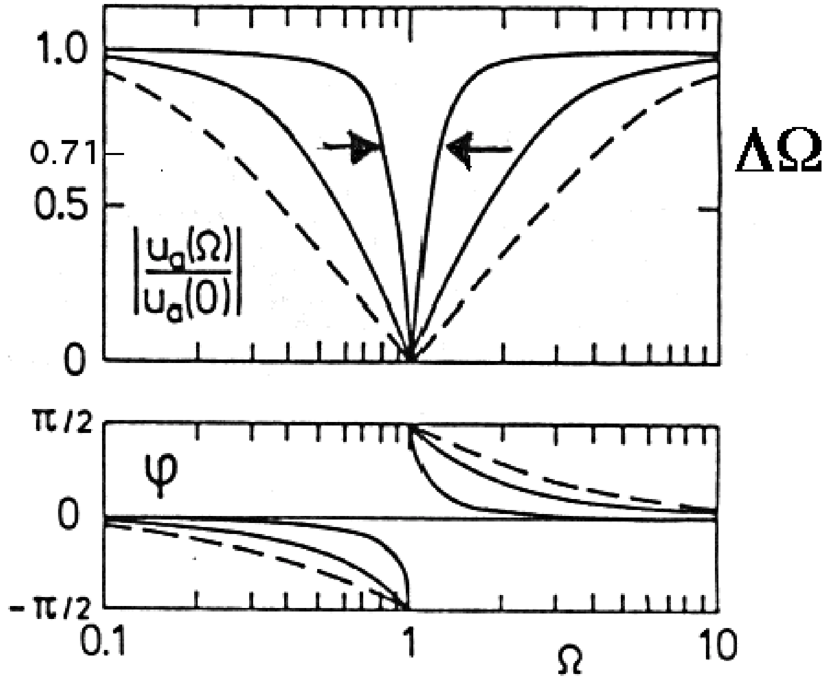
$$= \frac{j\Omega \cdot K}{1-\Omega^2+j\Omega(4-K)}$$

Tiefpass **Hochpass** **Bandpass k=1, 1.5, 2.5, 3.5**

Schaltung für einen Sperrkreis

- **Aktive Doppel-T-Bandsperre**
  Passiv (- - -) k=0, k=1 ($R_2=\infty$),1.8:





Resonanzfrequenz $f_r = 1/(2\pi RC)$

Verstärkung k

Unterdrückungsgüte $Q = f_r/\Delta f = 0.5/(2 - k)$

$H(P)=k\,(1 + P^2)/(1 + 2\,(2 - k)\,P + P^2)$