

Hartmut Gemmeke  
Forschungszentrum Karlsruhe, HPE  
Gemmeke@hpe.fzk.de  
Tel.: 07247-82-5635

WS2000/2001

---

# Einführung in die Elektronik für Physiker

Breitbandverstärker und aktive Filter

# Breitbandverstärker II

- Verstärker soll bei Gegenkopplung nicht schwingen  $\Delta\varphi < 180^\circ$   
 3 Stufen  $< 270^\circ$  !  $\Rightarrow$  Kompensation, 1 dominierender Tiefpass

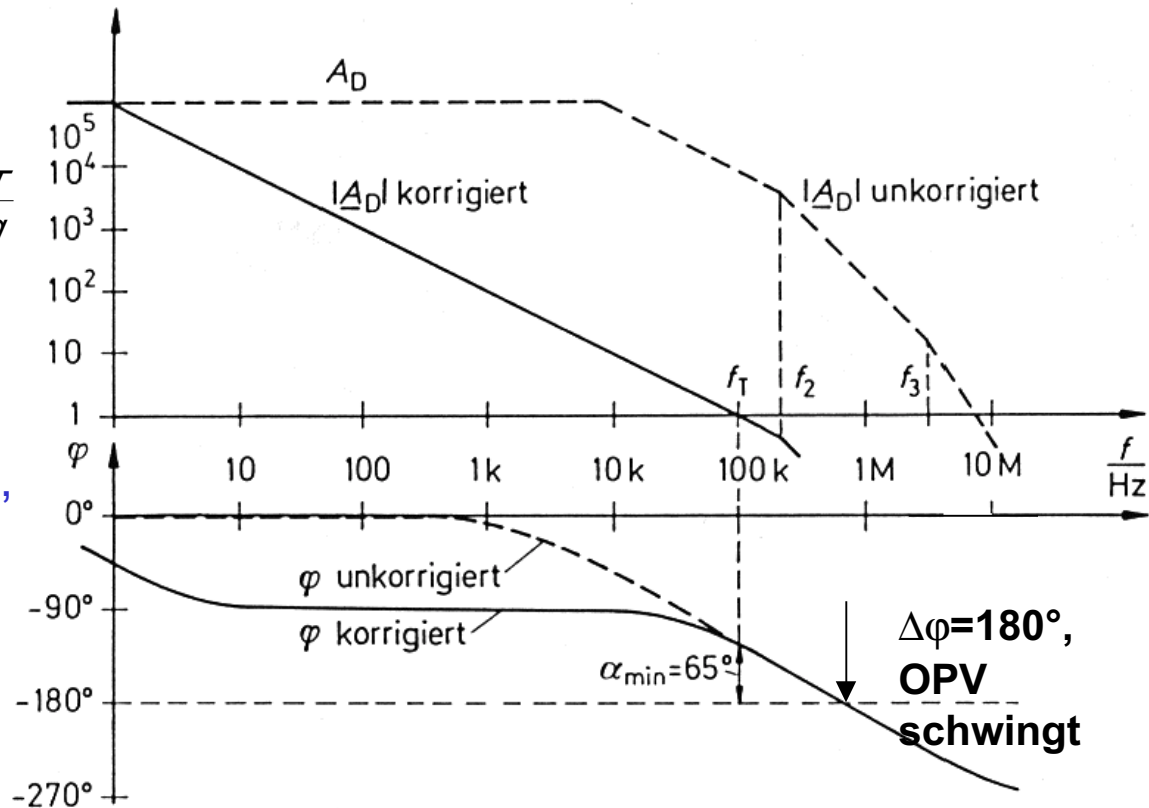
z.B.:  $\mu A741$   $I = 20\mu A$ ,  $C = 30pF$   $\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{I}{C} = \frac{20\mu A}{30pF} = 0,6 \frac{V}{\mu s}$

- 1. Bandbreite hängt stark von Schleifenverstärkung ab.

$f \cdot g = f_T$  oder Bandbreite  $f = \frac{f_T}{g}$

- 2. große Signale werden durch "Slewrate"  $dU/dt$  in der Anstiegszeit begrenzt, z.B.: 6V Puls in  $\mu A$  741

$t_r = \frac{U}{\frac{dU}{dt}} = \frac{6V}{0,6V/\mu s} = 10\mu s$



# Breitbandverstärker III

„Normaler“ kompensierter Operationsverstärker ohne äußere Beschaltung:

$$\underline{U}_a = U_D \cdot S_D \cdot \underline{Z} = v_{D0} \cdot U_D$$

$$\underline{Z} = R \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \approx \frac{1}{j2\pi f C}$$

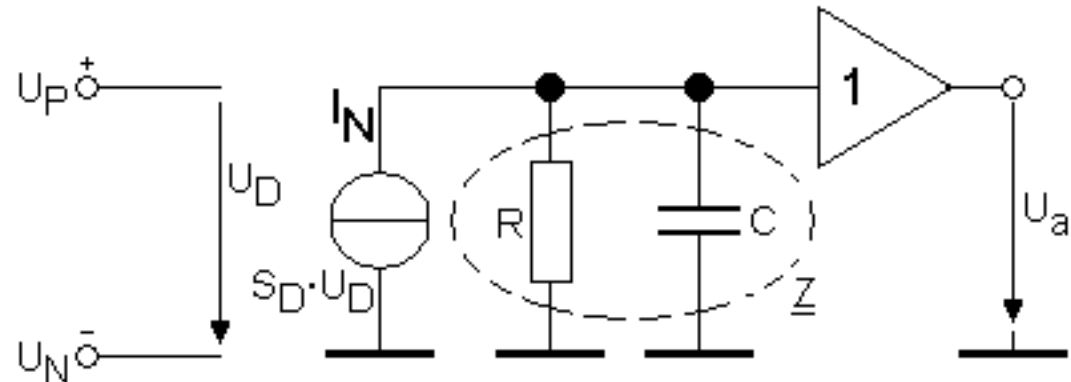
$$v_D = \frac{U_a}{U_D} = S_D \cdot \underline{Z} = \frac{v_{D0}}{1 + j \cdot \frac{f}{f_g}} \approx \frac{f_T}{j \cdot f} \quad \text{mit}$$

$$v_{D0} = S_D \cdot R$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

$$f_T = v_{D0} \cdot f_g$$

Verstärker, Ersatzschaltbild



$v_D$  „open loop gain“

Die Transitfrequenz  $f_t$  ist die Grenzfrequenz für einen gegengekoppelten Verstärker mit der Verstärkung 1.

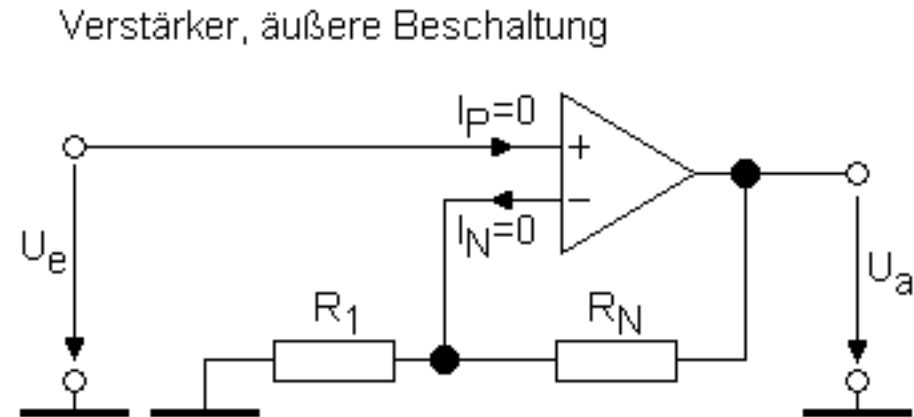
# Breitbandverstärker IV

Unter Benutzung der goldenen Regeln:

$$\frac{U_a - U_N}{R_N} - \frac{U_N}{R_1} = 0$$

$$U_P = U_N = U_e$$

$$\underline{v}_0 = \frac{U_a}{U_e} \approx 1 + \frac{R_N}{R_1} \quad \text{für } v_D \gg 1 + \frac{R_N}{R_1}$$

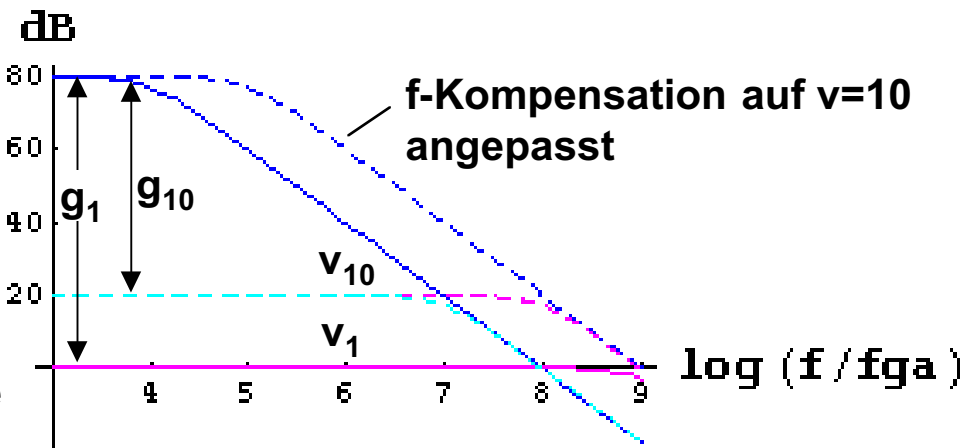


Frequenzgang mit fester Kompensation für alle Verstärkungen (aber abhängig von  $R_1$  und  $R_N$ ):

$$\underline{v} = \frac{v_0}{1 + j \cdot \frac{v_0}{f_T} \cdot f} \quad \text{daher} \quad f_{gs} = \frac{f_T}{v_0}$$

$$g_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_N} \cdot v_{D0} = \frac{v_{D0}}{v_0}$$

Für jede gewünschte Verstärkung und damit externe Beschaltung gibt es eine eigene optimale Kompensation mit größerer Bandbreite



# Transimpedanz-Verstärker I

Nichtinvertierender Eingang hochohmig  
invertierender Eingang niederohmig  
(Basis bzw. Stromeingang)

=>  $R_1$  und  $R_N$  auch niederohmig und  
Slewrate:

$$\left(\frac{I}{C}\right)_{\text{Transimp.}} \gg \left(\frac{I}{C}\right)_{\text{normaler OPV}}$$

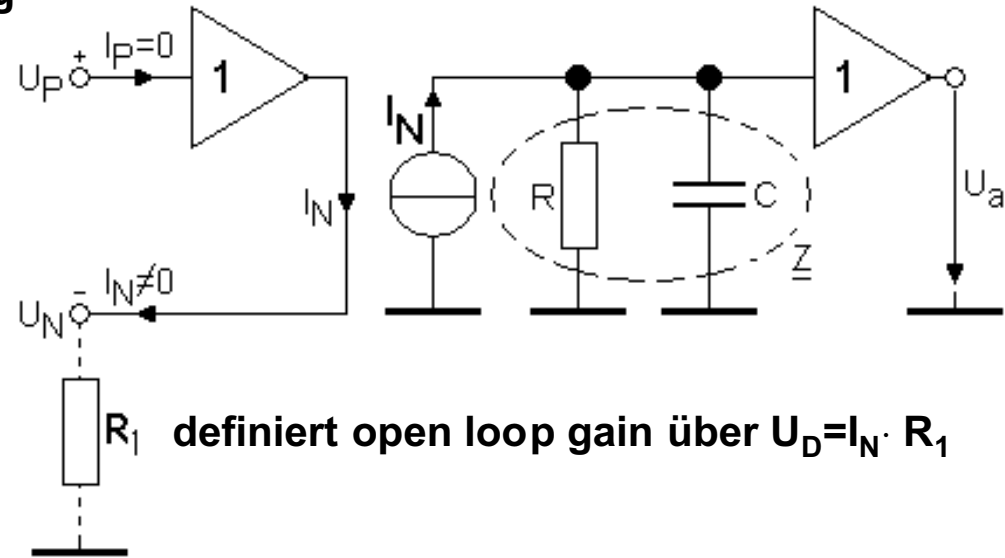
$$U_a = I_N \cdot Z$$

$$Z = R \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{R}{1 + jf/f_g} \approx \frac{1}{j2\pi f C}$$

mit  $f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$

$$\underline{v}_D = \frac{U_a}{U_D} = \frac{Z}{R_1} = \frac{v_{D0}}{1 + j \cdot \frac{f}{f_g}}, \quad \text{mit } v_{D0} = \frac{R}{R_1}$$

Verstärker, Ersatzschaltbild



$R_1$  definiert open loop gain über  $U_D = I_N \cdot R_1$

# Transimpedanz-Verstärker II

Knotenregel + goldene Regeln:

$$\frac{U_a - U_N}{R_N} - \frac{U_N}{R_1} + I_N = 0$$

$$U_N = U_p = U_e \text{ und } U_a = I_N \cdot Z$$

$$\Rightarrow U_a \left( \frac{1}{R_N} + \frac{1}{Z} \right) = U_e \left( \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\underline{v} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_N}{R_1 \cdot R_N} \cdot \frac{R_N \cdot Z}{R_N + Z} \approx 1 + \frac{R_N}{R_1} = v_0 \quad \text{für } |Z| \gg R_N$$

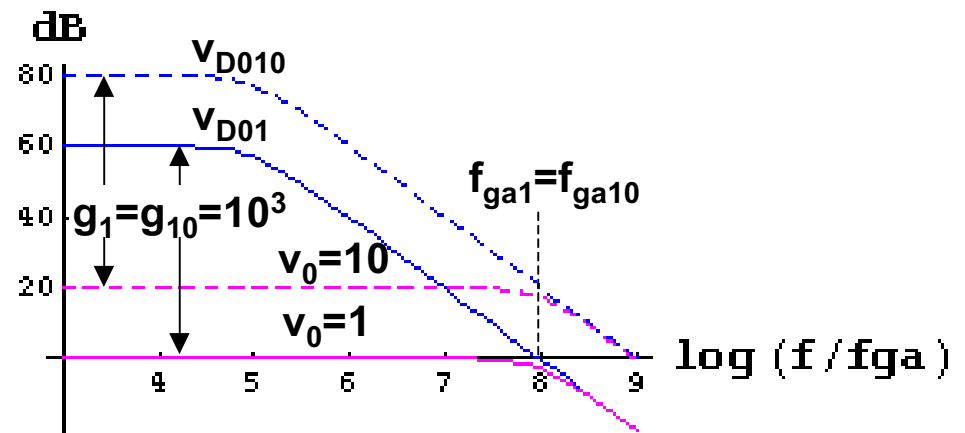
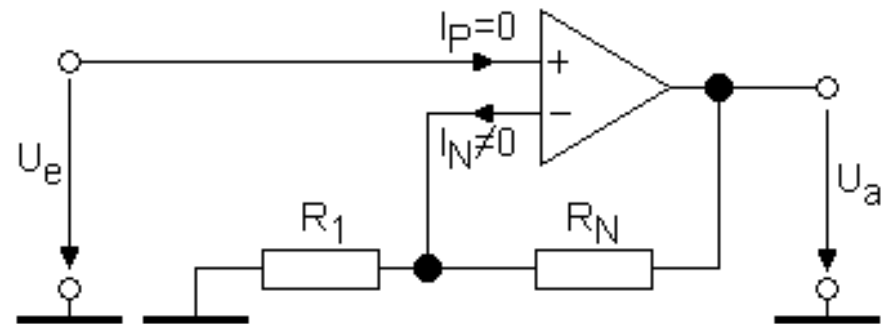
Frequenzgang und Schleifenverstärkung  
g unabhängig von  $R_1$ :

$$\underline{v} = \frac{v_0}{1 + j \cdot f / f_{gs}}, \quad f_{gs} = \frac{1}{2\pi \cdot R_N \cdot C}$$

$$v_{D0} = \frac{R}{R_M \parallel R_1} = \frac{R}{R_N} \cdot v_0 = g_0 \cdot v_0 \quad \text{und} \quad g_0 = \frac{R}{R_N}$$

Anwendung: Verstärker mit sehr großer  
Bandbreite und variabler Verstärkung

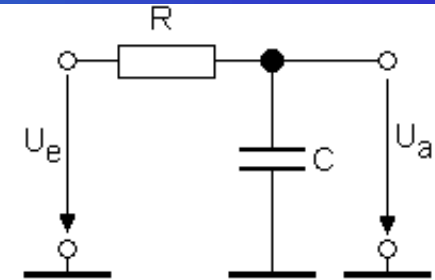
Verstärker, äußere Beschaltung



# Aktive Filter I

z.B.: Tiefpass 1.Ordnung

Übertragungsfunktion:  $H(\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1+j\omega \cdot R \cdot C}$



$|H(\omega)|$  hat einen negativen Pol

$j\omega \Rightarrow j\omega + \sigma = p$  Laplacetransformation L

$$H_{1T}(P) = \frac{1}{1+p \cdot R \cdot C} = \frac{L\{U_a(t)\}}{L\{U_e(t)\}}$$

für beliebige zeitabhängige Signale

**normierte Darstellung:**  $P = \frac{p}{\omega_g}$      $\omega_g = 2\pi \cdot f_g = \frac{1}{R \cdot C}$ ,     $\lim_{\sigma \rightarrow 0} P = \frac{j \cdot \omega}{\omega_g} = j \cdot \frac{f}{f_g} = j \cdot \Omega$

$$\Rightarrow H_{1T}(P) = \frac{1}{1+P} \text{ und } |H_{1T}(j \cdot \Omega)|^2 = \frac{1}{1+\Omega^2} \approx \frac{1}{\Omega^2} \text{ für } \Omega \gg 1 \quad 20\text{dB/Dekade}$$

n-te Ordnung mit reellen Koeffizienten  $\alpha_i$ , d.h. n reelle negative Pole auch

passiv darstellbar:

$$H_{nT}(P) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+\alpha_i \cdot P} = \frac{H_0}{\sum_{i=0}^n c_i \cdot P^i}, \quad \alpha_i > 0$$

$$|H_{nT}| \approx \frac{1}{\Omega^n}, \quad \Omega \gg 1 \quad n \cdot 20\text{dB/Dekade}$$

# Aktive Filter II

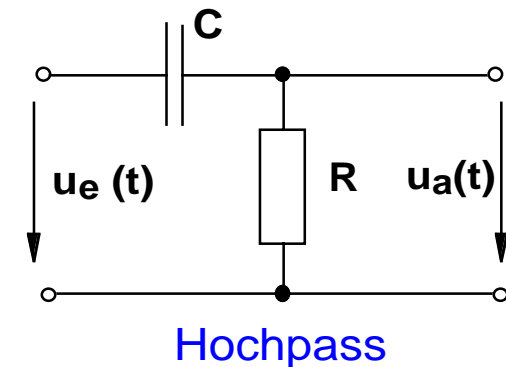
i.a. Fall **Zerlegung in quadratische Ausdrücke** mit komplexen Polen;  $a_i, b_i$  reell, nicht mehr passiv darstellbar:

$$H_{nT}(P) = \frac{H_0}{\left(1 + a_1 P + b_1 P^2\right) \cdot \left(1 + a_2 P + b_2 P^2\right) \cdot \dots}$$

n ungerade:  $b_n = 0$   
 $a_i, b_i$  bestimmen Filtercharakteristik

**Hochpass:**

Bild des Tiefpasses um  $\Omega = 1$  spiegeln  
mit gleichem  $a_i, b_i$  wie zuvor!



$$P \Rightarrow \frac{1}{p}, H_0 \Rightarrow H_\infty \text{ und } H_{nH}(P) = \frac{H_\infty}{\prod_i \left(1 + \frac{a_i}{p} + \frac{b_i}{p^2}\right)}$$



# Verschiedene Filtertypen

- 1 **Tiefpass mit kritischer Dämpfung:**  $\alpha_j = \alpha = \sqrt{n\sqrt{2}-1}$   
kein Überschwingen  
Reihenschaltung von identischen, entkoppelten Tiefpässen 1. Ordnung.

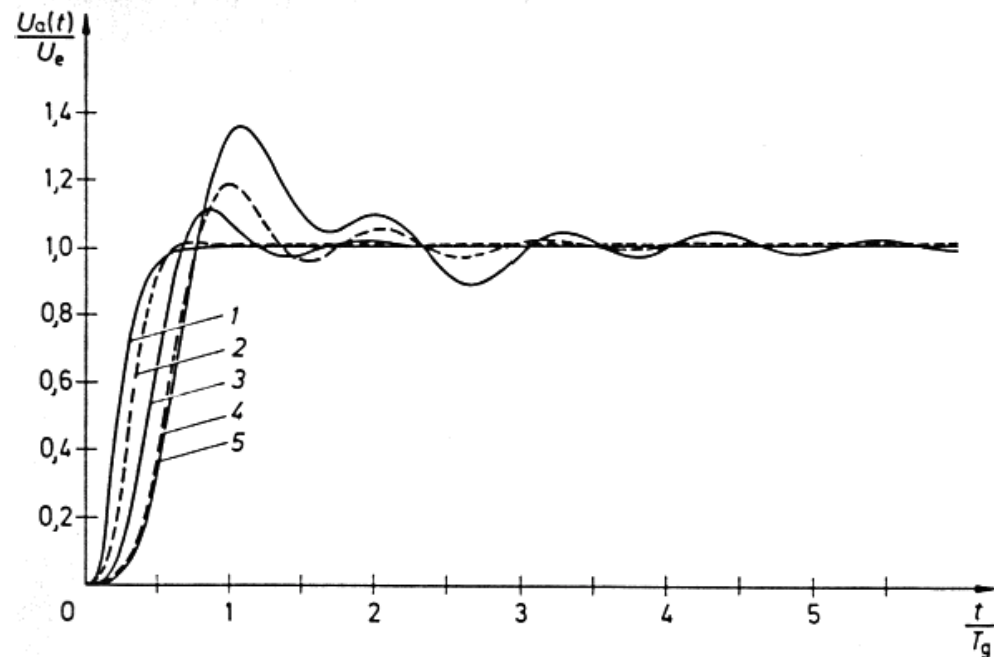
- 2 **Bessel-Filter:**  
Optimale Übertragung von Rechteckimpulsen für  $\Omega < 1$  Gruppenlaufzeit unabhängig von  $\omega$ , nur geringes Überschwingen.  $t_{gr} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$

- 3 **Butterworth-Filter:**  
Amplituden-Frequenzgang für  $\Omega < 1$  optimiert, konstant.

- 4 **Tschebyscheff-Filter mit Restwelligkeit  $\varepsilon = 0,5\text{dB}$**

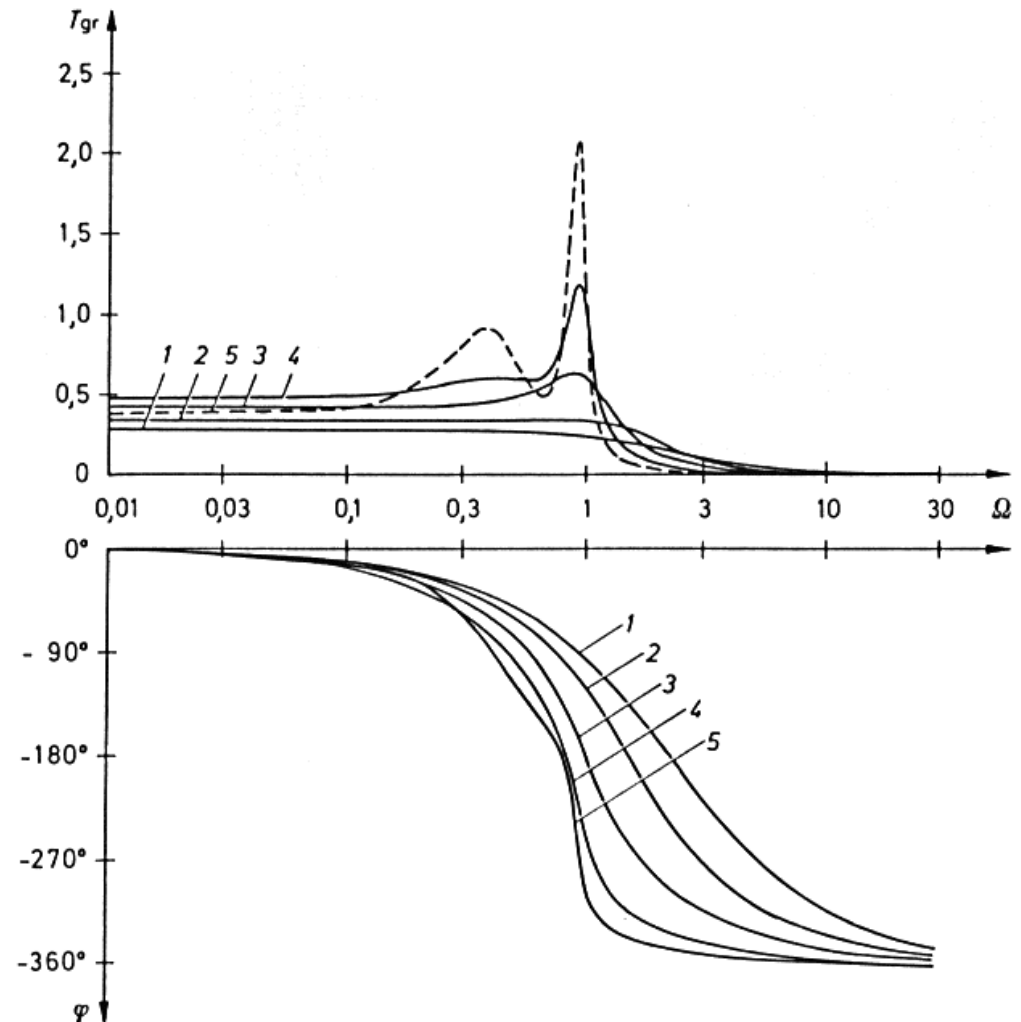
- 5 **Tschebyscheff-Filter mit Restwelligkeit  $\varepsilon = 3\text{dB}$**

**Antwort der verschiedenen Filter 4. Ordnung auf eine Stufenfunktion:**



# Frequenzgänge der Gruppenlaufzeit und $\varphi$

- **Normierte Gruppenlaufzeit  $T_{gr}(\Omega)$  für**
  - 1.kritische Dämpfung
  - 2.Bessel Filter
  - 3.Butterworth Filter
  - 4.Tschebyscheff Filter mit 0,5dB Welligkeit
  - 5.Tschebyscheff Filter mit 3dB Welligkeit



# Tiefpass-Filter 2. Ordnung: Kritische Dämpfung

## Aneinanderreihung von einfache Filtern erster Ordnung

$$H^2 = \left| \frac{1}{1+i\alpha\Omega} \frac{1}{1+i\alpha\Omega} \right|^2 = \left| \frac{1}{1-\alpha^2\Omega^2+2i\alpha\Omega} \right|^2 \Rightarrow a_1 = 2\alpha, b_1 = \alpha^2$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g}, \quad \alpha = \sqrt{\sqrt[n]{2}-1}, \quad n=2 \Rightarrow \alpha^2 = \sqrt{2}-1$$

Ein n-facher RC-Filter hat eine um den Faktor  $\alpha$  niedrigere Grenzfrequenz als der Einzelfilter:

$$H_{1T}^2 = \left| \frac{1}{1+i\frac{\omega}{\omega_g}} \right|^2 = \frac{1}{2}, \quad 3dB\text{-Punkt, für } \omega = \omega_g = 1/RC$$

$$H_{2T}^2 = \left( \left| \frac{1}{1+i\alpha} \right| \right)^4 = \left( \frac{1}{1+\alpha^2} \right)^2 = \left( \frac{1}{1+\sqrt{2}-1} \right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_{g2T} = \alpha \cdot \omega_{g1T} (\alpha = 0,43)$$

Oder ich muss eine um den Faktor  $1/\alpha$  größere Grenzfrequenz des Einzelfilters wählen um auf die gleiche Grenzfrequenz zu kommen!

# Tiefpass-Filter 2. Ordnung: Bessel-Filter

Für optimale Übertragung von Rechteckimpulsen  $b_1 = a_1/3$ :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g} < 1, \quad t_{gr} = -\frac{d\varphi}{d\omega} \quad \text{unabhängig von } \omega$$

$$\text{normierte Darstellung mit: } T_{gr} = \frac{t_{gr}}{T_g} = t_{gr} \cdot f_g = \frac{1}{2\pi} \cdot t_{gr} \cdot \omega \Rightarrow T_{gr} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{d\Omega}$$

$$\text{z.B. } n=2: \quad H = \frac{H_0}{1+a_1P+b_1P^2} = \frac{H_0}{1+j \cdot a_1\Omega - b_1\Omega^2} \Rightarrow \varphi = -\arctan \frac{a_1 \cdot \Omega}{1-b_1 \cdot \Omega^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Omega} = -a_1 \cdot \frac{1-b_1 \cdot \Omega^2 - \Omega \cdot (-2b_1 \cdot \Omega)}{\left(1-b_1 \cdot \Omega^2\right)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1 \cdot \Omega}{1-b_1 \cdot \Omega^2}\right)^2\right)} = -\frac{a_1 \cdot (1+b_1 \cdot \Omega^2)}{\left(1 + (a_1^2 - 2b_1) \Omega^2 + b_1^2 \Omega^4\right)}$$

$$\text{mit } b_1 = a_1^2 - 2b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{a_1}{3} \quad \text{konstant bis auf Term } \propto \Omega^4$$

# Tiefpass-Filter 2. Ordnung: Butterworth-Filter

solange wie möglich soll  $|H(\Omega)|^2 = |H(0)|^2$

$$|H(\Omega)|^2 = \left| \frac{1}{1 + j \cdot a_1 \cdot \Omega - b_1 \cdot \Omega^2} \right|^2 = \frac{1}{(1 - b_1 \cdot \Omega^2)^2 + (a_1 \cdot \Omega)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + (a_1^2 - 2b_1) \cdot \Omega^2 + b_1^2 \cdot \Omega^4}, \quad \Omega < 1 \Rightarrow \Omega^4 \ll \Omega^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 = 2b_1, \quad |H(\Omega=1)|^2 = \frac{1}{2} \cdot |H(\Omega=0)|^2 \quad \text{entspricht } 3\text{dB-Abschwächung}$$

$$\Rightarrow b_1 = 1, \quad a_1 = \sqrt{2}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \sqrt{2} \cdot \Omega - \Omega^2} \quad \text{bzw.} \quad |H|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^4}$$

# Tiefpass-Filter 2. Ordnung: Tschebyscheff-Filter

Übertragungsfunktion mit konstanter Welligkeit  $< \varepsilon$ , aber sehr schnellem Abfall

$$|H_{nT}|^2 = \frac{k \cdot H_0^2}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)}$$

$$T_1(\Omega) = \Omega$$

$$T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$$

$$T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega$$

⋮

Tschebyscheff Polynome

**k zur Normierung von  $H(\Omega=0)$**

**k = 1**                      wenn    n ungerade

**k = 1 +  $\varepsilon^2$**             wenn    n gerade

$$\frac{H_{max}}{H_{min}} = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

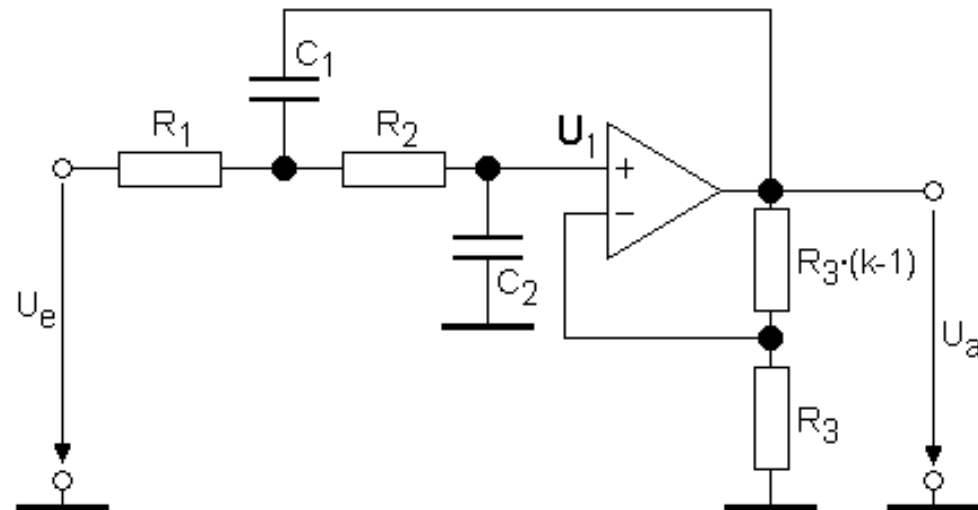
# Aktive Schaltung für Filter 2. Ordnung I

- Beispiel Tiefpass 2.Ordnung

- | Filter-koeffizient | Kritische Dämpfung | Bessel-Filter | Butterworth-Filter | Tschebyscheff-Filter, 1dB |
|--------------------|--------------------|---------------|--------------------|---------------------------|
| $a_1$              | 1,2872             | 1,3617        | 1,4142             | 1,3022                    |
| $b_1$              | 0,4142             | 0,6180        | 1,0000             | 1,5515                    |

Dimensionierung aus Vergleich mit Übertragungsfunktion

$$V_u = \frac{U_a}{U_1} = 1 + \frac{R_3 \cdot (k-1)}{R_3} = k$$



$$H(P) = \frac{k}{1 + \omega_g [C_1(R_1 + R_2) + (1-k)R_1 \cdot C_2] \cdot P + \omega_g^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot P^2}$$

Koeffizientenvergleich  $\Rightarrow$  Bestimmungsgleichungen für  $R_i, C_i$

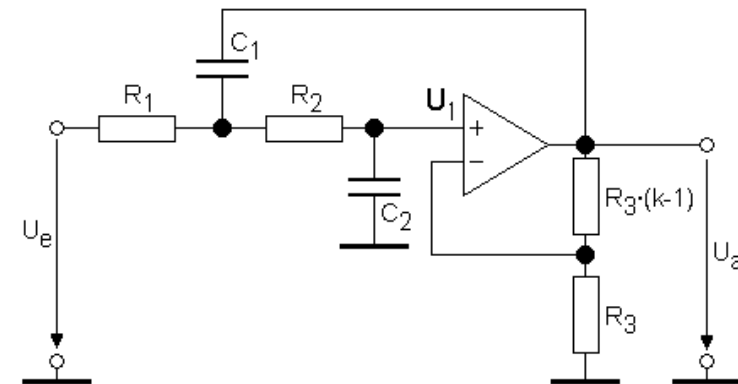
# Aktive Schaltung für Filter 2. Ordnung II

- Spezialfälle:  $k=1 \Rightarrow$  hohe Bandbreite des Verstärkers (Spannungsfolger), gut für Hochpässe.
- oder  $R_1 = R_2 = R$  und  $C_1 = C_2 = C$  (einfacher Wechsel der Filterart)

$$H(P) = \frac{k}{1 + \omega_g(3-k) \cdot R \cdot C \cdot P + (\omega_g \cdot R \cdot C)^2 \cdot P^2}$$

$$a_1 = \omega_g(3-k) \cdot R \cdot C, \quad \sqrt{b_1} = \omega_g \cdot R \cdot C$$

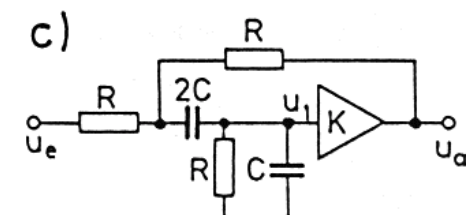
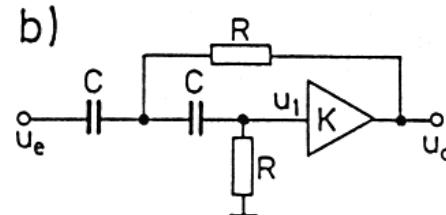
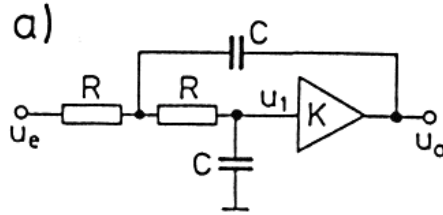
$$k = H_0 = 3 - \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \Rightarrow \text{Filtertyp}, \quad R \cdot C \Rightarrow \omega_g = \frac{\sqrt{b_1}}{R \cdot C}$$



	Kritische Dämpfung	Bessel-Filter	Butterworth-Filter	Tschebyscheff-Filter, 1dB Welligkeit
<b>k</b>	<b>1,0</b>	<b>1,268</b>	<b>1,586</b>	<b>1,955</b>



# Vergleich der Filtereigenschaften

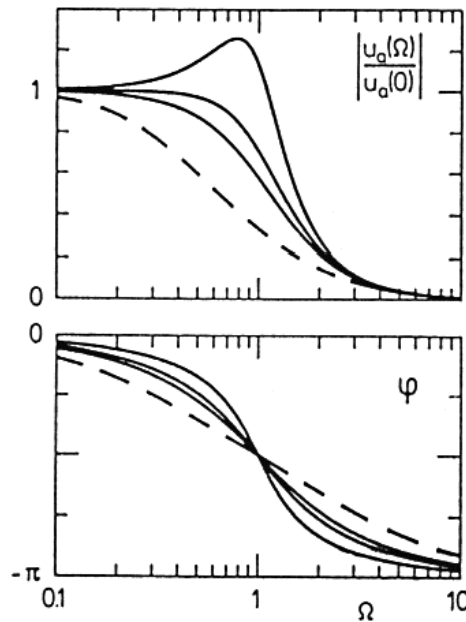


1.  $k=2.144$   
Tschebyscheff-  
Filter (2dB)

2.  $k = 1,586$   
Butterworth-  
Filter

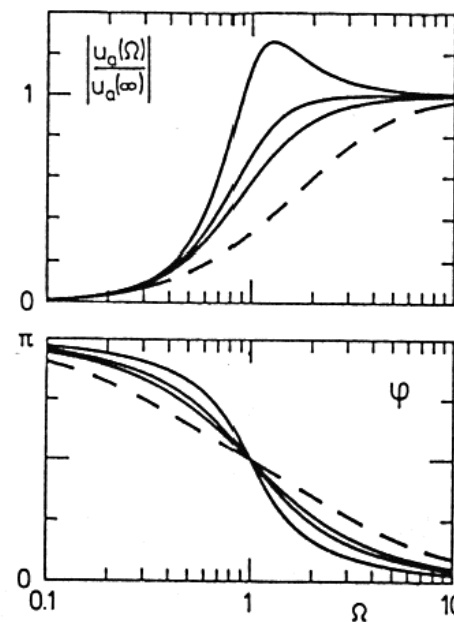
3.  $k=1.286$   
Bessel-Filter

4.  $k=1$  kritische  
Dämpfung - - -



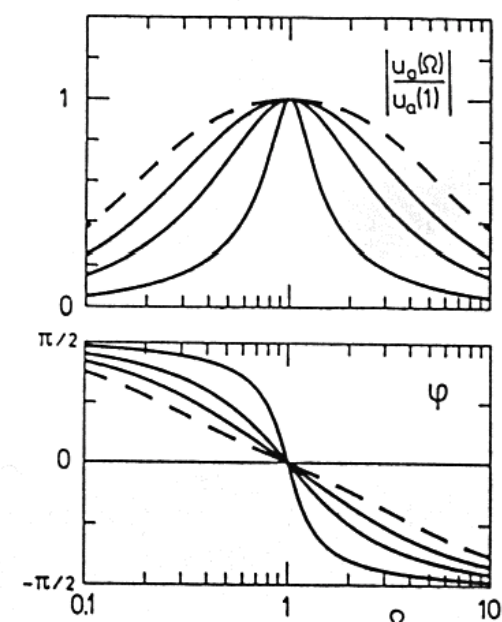
$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{K}{1-\Omega^2+j\Omega(3-K)}$$

**Tiefpass**



$$= \frac{-\Omega^2 \cdot K}{1-\Omega^2+j\Omega(3-K)}$$

**Hochpass**

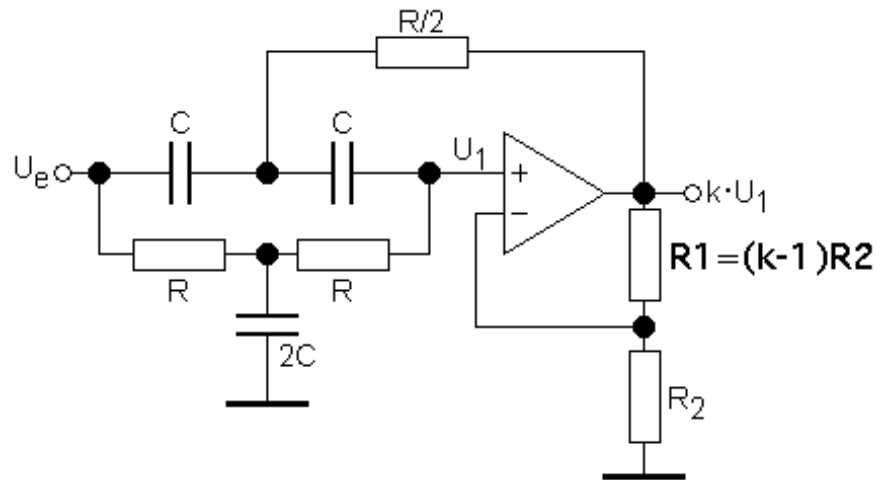


$$= \frac{j\Omega \cdot K}{1-\Omega^2+j\Omega(4-K)}$$

**Bandpass**  
 $k=1, 1.5, 2.5, 3.5$

# Schaltung für einen Sperrkreis

- **Aktive Doppel-T-Bandsperre**  
Passiv (- - -)  $k=0$ ,  $k=1$  ( $R_2=\infty$ ), 1.8:



Resonanzfrequenz  $f_r = 1/(2\pi RC)$

Verstärkung  $k$

Unterdrückungsgüte  $Q = f_r / \Delta f = 0.5 / (2 - k)$

$H(P) = k (1 + P^2) / (1 + 2(2 - k)P + P^2)$

